

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'admission
aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées
Session 2006

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière **BCPST**

Durée 3 heures

Cette épreuve comporte 6 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

**L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit.**

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

L'épreuve est composée de trois parties indépendantes qui peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêté au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

1^{ère} partie

Étude d'un réservoir à gaz

On dispose d'un réservoir \mathcal{R} de température constante de grande capacité, contenant un gaz diatomique G , sous une pression $P_R = 25 \times 10^5$ Pa et une température $T_0 = 300$ K constantes.

On admettra dans la suite que le volume de ce réservoir est tel que l'on pourra l'assimiler à un générateur de gaz comprimé parfait. C'est-à-dire que la pression dans le réservoir \mathcal{R} est indépendante de la quantité de gaz qui peut en sortir.

On supposera que le gaz G se comporte comme un gaz parfait diatomique rigide de masse molaire $M = 28 \times 10^{-3}$ kg.mol⁻¹. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹.

Un cylindre indéformable C isolé thermiquement de l'extérieur est séparé, à l'aide d'un piston Π à parois athermanes, en deux compartiments C_1 et C_2 , de volumes respectifs V_1 et V_2 . Le piston Π , de masse négligeable, peut glisser sans frottement tout en restant perpendiculaire à l'axe Δ du cylindre C (figure 1).

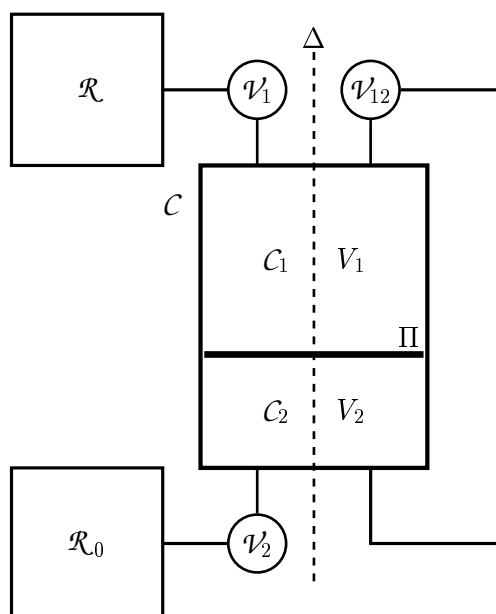


Figure 1: Réservoirs reliés à un cylindre à piston.

C_1 peut être mis en communication avec le réservoir \mathcal{R} par l'intermédiaire d'une vanne \mathcal{V}_1 et avec C_2 par l'intermédiaire d'une vanne \mathcal{V}_{12} .

C_2 peut être mis en communication avec un autre réservoir \mathcal{R}_0 au moyen d'une vanne \mathcal{V}_2 .

On négligera systématiquement tout transfert thermique à travers une vanne fermée.

1.1. On note γ le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant et on donne, pour les gaz diatomiques rigides, $\gamma = \frac{7}{5}$.

1.1.1. Donner un exemple de gaz diatomique.

1.1.2. Exprimer les capacités calorifiques molaires à volume constant c_v et à pression constante c_p pour un gaz parfait diatomique rigide en fonction de γ et R . Application numérique.

1.2. Le piston Π est bloqué. Le compartiment C_1 de volume $V_1 = 10$ L constant contient le gaz G à la température $T_0 = 300$ K et sous la pression $P_0 = 1 \times 10^5$ Pa. Les vannes \mathcal{V}_{12} et \mathcal{V}_2 étant fermées, on ouvre *brutalement* la vanne \mathcal{V}_1 afin de remplir le compartiment C_1 avec le gaz G.

1.2.1. Exprimer la quantité de matière N_1 du gaz contenu initialement dans le compartiment C_1 en fonction des données du problème. Application numérique.

1.2.2. Que vaut la pression P_1 dans le compartiment C_1 à la fin de l'opération ?

1.2.3. Exprimer de même la quantité de matière N du gaz qui passe du réservoir \mathcal{R} dans le compartiment C_1 en fonction de R , P_0 , P_R , V_1 , T_0 et de la température T_1 du gaz contenu dans C_1 à la fin de l'opération.

On considère comme système le gaz contenu initialement dans C_1 (quantité de matière N_1) et le gaz qui passe de \mathcal{R} à C_1 (quantité de matière N).

1.2.4. Exprimer la variation ΔU de l'énergie interne du système en fonction de N , N_1 , T_0 , T_1 , γ et R .

1.2.5. Exprimer le travail W reçu par le système en fonction de la pression P_R et du volume V_N qu'occupait la quantité de matière N du gaz dans le réservoir \mathcal{R} .

1.2.6. En déduire la température finale T_1 du gaz. Pour cela on pourra appliquer le premier principe de la thermodynamique après avoir montré que la transformation peut être considérée comme adiabatique. On exprimera T_1 en fonction de P_R , P_0 , T_0 et γ . Application numérique.

1.3. Le piston Π étant toujours bloqué et le compartiment C_2 parfaitement vide, on ferme la vanne \mathcal{V}_1 puis on ouvre la vanne \mathcal{V}_{12} . La tuyauterie est thermiquement isolée de l'extérieur, mais permet l'échange thermique entre C_1 et C_2 quand \mathcal{V}_{12} est ouverte. On donne $V_1 = 10$ L et $V_2 = 2,0$ L. Soit T_2 la température du gaz lorsque l'équilibre est atteint.

1.3.1. Comment appelle-t-on une telle transformation ?

1.3.2. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que $T_2 = T_1$.

1.3.3. La transformation du gaz est-elle réversible ? Déterminer l'expression de la variation d'entropie ΔS en fonction de P_R , V_1 , V_2 et T_1 . On justifiera soigneusement la méthode utilisée. Commenter le résultat obtenu.

1.3.4. Calculer numériquement ΔS et commenter le résultat obtenu. On donne $\ln \frac{6}{5} \approx 0,18$.

1.3.5. L'état final du système dépend-il de l'ordre de fermeture et d'ouverture des vannes \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 ? Expliquer brièvement.

1.4. Le piston Π étant bloqué et la vanne \mathcal{V}_{12} fermée, le compartiment C_1 de volume $V_1 = 10$ L est rempli à l'aide du réservoir \mathcal{R} . La température du gaz contenu dans C_1 est alors $T_0 = 300$ K.

Le compartiment C_2 est rempli à l'aide d'un réservoir \mathcal{R}_0 contenant un gaz parfait G_0 à la pression $P = \frac{P_R}{x}$. On donne $c_{v0} = 3R$ la capacité calorifique molaire à volume constant de G_0 et on note γ_0 son rapport de capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

Dans l'état initial, la température du gaz G_0 contenu dans C_2 est $T_0 = 300$ K et on note le volume V_2^i du compartiment C_2 sous la forme $V_2^i = V_0 x$ où $V_0 = 0,1$ L et $x = \frac{P_R}{P}$ est un paramètre réel pouvant varier de 0 à x_{\max} .

Les vannes \mathcal{V}_{12} et \mathcal{V}_2 restant fermées, la vanne \mathcal{V}_1 est à nouveau ouverte. On débloque le piston Π et on le bloque à nouveau dès que la pression est la même dans les deux compartiments.

1.4.1. Déterminer la quantité de matière n_2 du gaz G_0 dans le compartiment C_2 en fonction de P_R, V_0 et T_0 .

1.4.2. Donner l'expression du volume V_2 occupé par le gaz de C_2 dans l'état final en fonction de sa température T ainsi que de T_0 et V_0 .

1.4.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que la température $T(x)$ du gaz G_0 contenu dans C_2 est donnée par :

$$T(x) = \frac{3+x}{4} T_0$$

1.4.4. En déduire l'expression de V_2 en fonction de V_0 et x .

1.4.5. Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz G_0 contenu dans C_2 en fonction de P_R, V_0, T_0 et x .

1.4.6. **Applications numériques**

1.4.6.1. Calculer numériquement T et ΔS pour $x = 25$. On donne $\ln 2 \approx 0,69$ et $\ln 3 \approx 1,1$.

1.4.6.2. Déterminer la valeur numérique de ΔS pour $x = 1$ et pour x tendant vers zéro.

1.4.6.3. Déterminer x_{\max} ainsi que la valeur numérique de ΔS lorsque $x = x_{\max}$. On donne $\ln 7450 \approx 8,92$.

1.4.7. Représenter ΔS en fonction de x et commenter le graphique obtenu.

2^{ème} partie

Étude d'un moteur à piston

Un moteur à piston est constitué d'un cylindre calorifugé de volume $V_A = 0,8$ L, muni de deux soupapes S_1 et S_2 et d'un piston Π athermane pouvant glisser sans frottement le long de l'axe du cylindre (figure 2). Le cylindre est relié à l'aide de la soupape S_1 au réservoir à gaz \mathcal{R} étudié en 1, rempli du gaz parfait G .

2.1. Initialement le piston est placé contre la culasse K et le volume de gaz enfermé dans le cylindre est nul. La soupape S_2 étant fermée, on ouvre la soupape S_1 pour mettre le cylindre en communication avec le réservoir \mathcal{R} . Le piston se déplace alors vers la droite jusqu'à ce que le volume V du gaz enfermé dans le cylindre soit égal à $\frac{V_A}{\alpha}$. Pour les applications numériques, on prendra $\alpha = 5$.

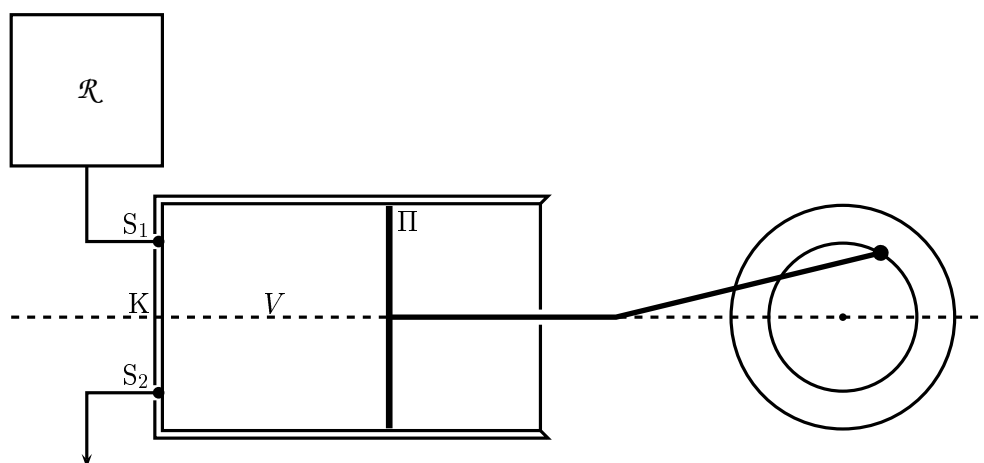


Figure 2: Moteur à piston.

2.1.1. Que vaut la pression à l'intérieur du cylindre à la fin de cette première étape ? Comment appelle-t-on une telle transformation ?

2.1.2. Exprimer la quantité de matière n_0 admise dans le cylindre à la fin de cette étape en fonction de P_R , V_A , α et de la température T_1 du gaz dans le cylindre.

2.1.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, exprimer T_1 en fonction de T_0 .

2.1.4. Calculer numériquement n_0 .

2.2. À la fin de la première étape, alors que la soupape S_2 est toujours fermée, la soupape S_1 se ferme et le gaz enfermé subit une détente adiabatique, que l'on suppose réversible, jusqu'à ce que le volume du cylindre soit égal à V_A .

2.2.1. Exprimer la pression P_2 dans le cylindre à la fin de cette deuxième étape en fonction P_R , γ et α . Application numérique. On donne $5^{7/5} \approx 9,52$.

2.2.2. Exprimer le travail W_2 reçu par le gaz au cours de cette étape en fonction de P_R , V_A , γ et α .

2.3. À la fin de la deuxième étape, la soupape S_2 s'ouvre mettant le gaz contenu dans le cylindre en communication avec l'extérieur où la pression est $P_0 = 1 \times 10^5$ Pa. Le piston reste d'abord immobile ($V = V_A$) tant que la pression $P \geq P_0$, ensuite il est ramené vers la culasse jusqu'à $V = 0$. Un nouveau cycle peut alors commencer.

2.3.1. Tracer l'allure du diagramme de WATT donnant la pression P du gaz, en ordonnée, en fonction du volume V qu'il occupe. Indiquer les points remarquables et préciser le sens de parcours du cycle.

2.3.2. Déterminer l'expression du travail W_0 fourni au gaz par le piston au cours d'un cycle en fonction de P_0 , P_R , V_A , γ et α . Application numérique.

2.3.3. Quel doit être, en régime stationnaire, le débit massique D_1 du gaz pour que la puissance mécanique du moteur soit $\mathcal{P} = 1$ kW ? On donnera l'expression littérale de D_1 en fonction de \mathcal{P} , W_0 , P_R , V_A , T_0 , M , R , γ et α et on calculera numériquement D_1 en kg/h.

2.3.3.1. Calculer numériquement la durée Δt d'un cycle dans ces conditions.

3^{ème} partie

Étude d'un défibrillateur

Un défibrillateur permet de lutter contre un trouble grave du rythme cardiaque appelé fibrillation cardiaque et pouvant conduire à un infarctus. Le premier défibrillateur a été inventé en 1947. Il fonctionnait avec le courant alternatif du secteur. Le but de ce problème est d'étudier le principe de fonctionnement d'un défibrillateur ambulateur. Un tel défibrillateur, inventé dans les années 1960, dispose d'une alimentation autonome à courant continu. Il est constitué essentiellement d'un condensateur de capacité C que l'on charge à l'aide d'une batterie. L'énergie stockée sert ensuite à administrer un choc électrique au patient en fibrillation.

La figure 3 montre le schéma de principe simplifié d'un défibrillateur à fonctionnement autonome représenté par un condensateur idéal de capacité C . On commence par charger le condensateur à l'aide d'une batterie représentée par un générateur de tension idéal de force électromotrice constante E_0 en série avec un résistor de résistance R_0 ; l'interrupteur K est alors en position ①. Dès que la charge accumulée dans le condensateur est suffisante, on fait basculer l'interrupteur sur la position ② pour permettre la décharge du condensateur dans le résistor de résistance R' schématisant le corps humain.

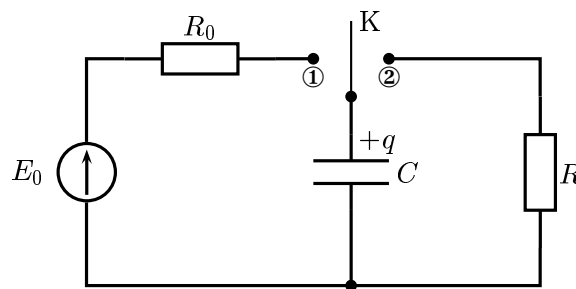


Figure 3: Schéma simplifié d'un défibrillateur.

3.1. Étude de la charge

L'interrupteur K est placé en position ①.

3.1.1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur. On posera $\tau_0 = R_0 C$.

3.1.2. Résoudre cette équation différentielle en supposant que le condensateur est initialement déchargé.

3.1.3. Représenter graphiquement $q(t)$ et donner la signification physique de τ_0 .

3.1.4. Comment doit-on choisir les paramètres du système pour avoir une charge maximale ? Pour que la charge soit rapide ?

3.2. Étude de la décharge

L'interrupteur K est placé en position ② à l'instant t_0 . La charge du condensateur vaut alors q_0 .

3.2.1. Donner l'expression de q_0 en fonction de t_0 , τ_0 , C et E_0 . Simplifier cette expression sachant que $t_0 \gg \tau_0$. Quelle est la signification physique de cette condition ?

3.2.2. Donner l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ pour $t \geq t_0$.

3.2.3. Résoudre cette équation différentielle et exprimer $q(t)$, pour $t \geq t_0$, en tenant compte des conditions initiales. On posera $\tau' = R'C$.

3.2.4. Représenter graphiquement $q(t)$ en fonction du temps t pour $t \geq 0$. On montrera la charge et la décharge du condensateur et on portera τ_0 , τ' et q_0 sur le graphique obtenu.

3.2.5. Déterminer le courant $i'(t)$ qui traverse le patient pendant la décharge et représenter graphiquement $i'(t)$ en fonction de t . Commenter le graphique obtenu.

3.3. Amélioration du modèle

Lors de l'administration du choc électrique, il faut tenir compte en réalité d'une capacité de contact C' et de la résistance R des connexions électriques. La figure 4 représente le défibrillateur lors de la décharge dans un tel circuit. À l'instant initial ($t = 0$), on note $q_0 = q(0)$ la charge du condensateur de capacité C et on suppose que le condensateur de capacité C' est totalement déchargé. Aucun courant ne parcourt le circuit à l'instant initial avant la fermeture de l'interrupteur K sur la position ②.

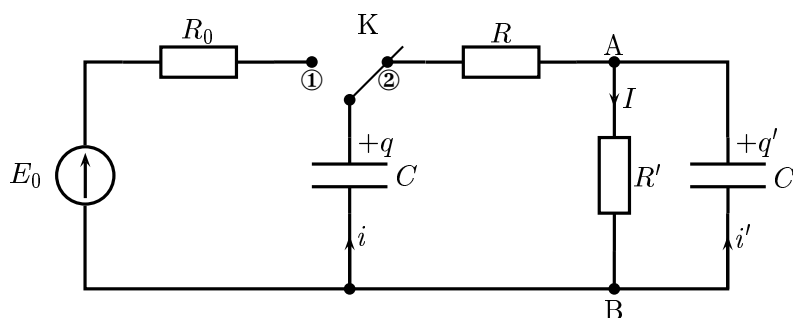


Figure 4: Défibrillateur au cours de la décharge.

3.3.1. Établir l'équation différentielle de second ordre vérifiée par la tension $u' = u_{AB}$ aux bornes de la charge en fonction de R , R' , C et C' .

3.3.2. Sachant que dans la pratique $R \ll R'$ et $C' \ll C$, montrer que la solution générale $u'(t)$ de cette équation différentielle, peut s'écrire sous la forme :

$$u'(t) = A \exp r_1 t + B \exp r_2 t$$

où r_1 et r_2 sont deux constantes réelles que l'on exprimera en fonction de R , R' , C et C' . Quel est le signe de r_1 et r_2 ? Comment détermine-t-on A et B ?

3.3.3. Montrer qu'à l'instant initial, juste après la fermeture de l'interrupteur sur la position ② :

$$q(0^+) = R C i(0^+)$$

3.3.4. En déduire les expressions des constantes A et B en fonction de r_1 , r_2 , q_0 , R , C et C' .

3.3.5. Représenter l'allure de l'intensité $I(t)$ du courant qui traverse la charge R' en fonction du temps. On précisera les abscisses des points particuliers de cette courbe. Commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE