

Olympiades des mathématiques 2006

الفرض الأول

من س 2:30 إلى 5:30

مدة الإنجاز: ثلاث ساعات

الجمعة 29 أبريل 2005

Exercice 1 :

x et y sont deux réels strictement positifs et vérifiant :

$$x^2 + y^2 = 6xy$$

Quelle est la valeur du rapport $\frac{x + y}{x - y}$?

Exercice 2 :

x, y, z et t sont des réels strictement positifs et vérifiant :

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad z^2 + t^2 \leq 4$$

Démontrer que $xz + yt \leq 2$

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie sur IR et vérifiant :

$$f(1003 + x) = f(1003 - x)$$

et $f(2006 + x) = -f(2006 - x)$ pour tout x de IR.

a) Démontrer que la fonction f est impaire.

b) Démontrer que la fonction f est périodique.

Exercice 4 :

On considère un quadrilatère convexe ABCD inscriptible
et dans lequel $\widehat{B} = 60^\circ$.

a) Démontrer que si $BC = CD$ alors $AB = CD + DA$.

b) La réciproque est-elle vraie ?